

# Técnicas Robustas de Tratamiento de Señales Basadas en Métodos de Estimación Estadística

Juan Marcos Ramírez Rondón, M.S.  
Tutor: José Luis Paredes Quintero, Ph.D.



Programa de Doctorado en Ciencia Aplicadas  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de Los Andes



8 de diciembre de 2016

# Tabla de Contenidos

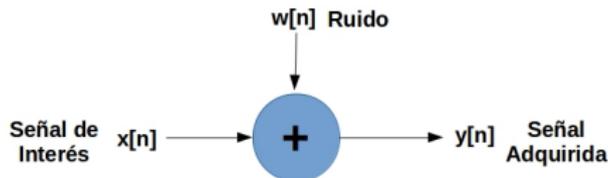
- 1 Introducción
- 2 Estimadores M
- 3 Filtros Recursivos Myriad Ponderados
- 4 Filtros Recursivos Híbridos Myriad
- 5 Filtros Recursivos Myriad-Media
- 6 Resultados y Análisis
- 7 Listado de Publicaciones
- 8 Conclusiones y Trabajo Futuro

# Tabla de Contenidos

- 1 **Introducción**
- 2 Estimadores M
- 3 Filtros Recursivos Myriad Ponderados
- 4 Filtros Recursivos Híbridos Myriad
- 5 Filtros Recursivos Myriad-Media
- 6 Resultados y Análisis
- 7 Listado de Publicaciones
- 8 Conclusiones y Trabajo Futuro

# Introducción

- En general, las señales adquiridas en aplicaciones de tratamiento de señales e imágenes tienen una componente de carácter aleatorio.
  - Imperfecciones en el proceso de adquisición
  - Efectos de la contaminación del entorno
- El efecto de la contaminación se reúne en una fuente única de **ruido aditivo**



## Tratamiento Estadístico de Señales

- El ruido aditivo se describe usando modelos estadísticos, i.e.

$$w[n] \sim f_w(w) \quad (1)$$

- Las realizaciones del modelo estadísticos deben aproximarse al comportamiento de un conjunto de perturbaciones

# Introducción

## Tratamiento Estadístico de Señales

- Considerando el modelado estadístico de las perturbaciones aditivas:
  - La salida de una estructura de tratamiento de señales puede considerarse como el resultado de un proceso de estimación de parámetros.
  - **Métodos de estimación estadística** se convierte en una herramienta fundamental para el análisis y diseño de estructuras de tratamiento digital de señales.
- Frecuentemente, las estructuras son desarrolladas bajo la premisa de que el ruido obedece una distribución Gausiana.
  - Desarrollo matemático manejable
  - **Degradan significativamente su rendimiento ante valores atípicos (outliers)**
- En múltiples aplicaciones, el ruido encontrado puede aproximarse mejor mediante modelos estadísticos de colas pesadas [1, 2].
  - Mayor probabilidad de ocurrencia de valores atípicos (ruido impulsivo)
- Es necesario el desarrollo de estructuras robustas ante ruido impulsivo.

# Tabla de Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Estimadores M**
- 3 Filtros Recursivos Myriad Ponderados
- 4 Filtros Recursivos Híbridos Myriad
- 5 Filtros Recursivos Myriad-Media
- 6 Resultados y Análisis
- 7 Listado de Publicaciones
- 8 Conclusiones y Trabajo Futuro

# Estimadores M (Estimadores de Verosimilitud Máxima)

- Dado un conjunto de observaciones  $\{z_m\}_{m=1}^L$ , el estimador M del parámetro de localización  $\theta$  viene dado por:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{m=1}^L \rho(z_m - \theta), \quad (2)$$

$\rho(\cdot)$  es conocida como la **función costo**.

- Cuando el proceso de adquisición sigue el modelo:

$$z_m = \theta + \eta_m, \text{ para } m = 1, \dots, L \quad (3)$$

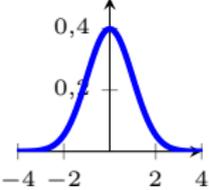
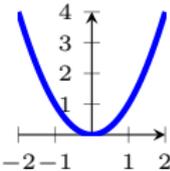
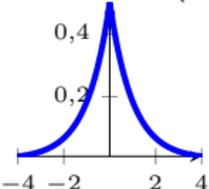
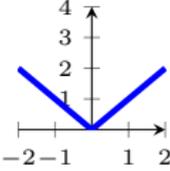
$\eta_m$  representa la  $m$ -ésima componente de **ruido aditivo**.

Estimador M de  $\theta \rightarrow$  Estimado de Verosimilitud Máxima de  $\theta$

$$\rho(u) = -\log f(u) \quad (4)$$

$f(u)$  es la función de densidad de probabilidad que caracteriza a cada componente  $\eta_m$

# Estimadores M (Estimadores de Verosimilitud Máxima)

Función de Densidad de Probabilidad	Función Costo	Estimador M
Gausiana	$\rho(u) = u^2$	Media Muestral $\frac{1}{L} \sum_{m=1}^L z_m$
$f_{\eta}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right)$ 		
Laplaciana	$\rho(u) =  u $	Mediana Muestral MEDIANA( $z_m$   $m=1$ )
$f_{\eta}(\eta) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{ \eta }{\sigma}\right)$ 		

# Myriad Muestral

Función de Densidad de Probabilidad	Función Costo	Estimador M
Cauchy	$\rho(u) = \log[K^2 + u^2]$	Myriad Muestral
$f_{\eta}(\eta) = \frac{K}{\pi} \frac{1}{(K^2 + \eta^2)}$		$\text{myriad}(z_m  _{m=1}^L; K)$

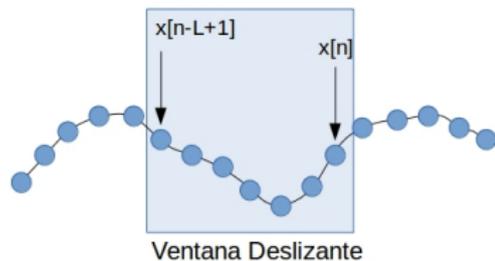
- Dado un conjunto de observaciones  $\{z_m |_{m=1}^L\}$  y un parámetro de dispersión  $K > 0$ :
  - La muestra myriad es el estimado de verosimilitud máxima del parámetro de localización cuando las componentes de ruido aditivo  $\{\eta_m |_{m=1}^L\}$  siguen una distribución Cauchy [3, 4].**
- Es un operador de uso reciente comparado con los operadores de promedio y mediana.
- Ha sido usado en una amplia gama de aplicaciones de tratamiento robusto de señales [5, 6, 7, 8].

# Estructuras de filtrado usando estimadores M

## Estructura de Filtrado de Ventana Deslizante

- Captura [en el instante  $n$ ] un conjunto de  $L$  muestras de la señal de entrada.
- La salida [en el instante  $n$ ] consiste en el estimador M de las muestras dentro de la ventana de observación.

Señal de Entrada



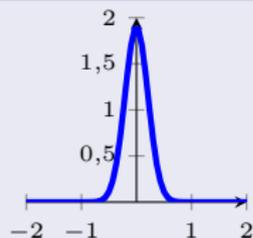
$$y[n] = \arg \min_{\theta} \sum_{m=0}^{L-1} \rho(x[n-m] - \theta), \quad (5)$$

- **Sin embargo, no considera las relaciones estadísticas ni temporales entre las muestras dentro de la ventana de observación.**

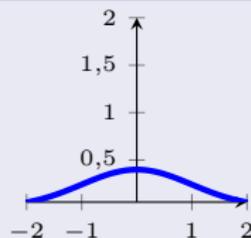
# Suavizadores M

- Incorpora coeficientes positivos  $\{w_m |_{m=1}^L\}$  que valoran los niveles de confiabilidad de las muestras correspondientes  $\{z_m |_{m=1}^L\}$
- **Este enfoque se deriva de caracterizar cada componente de ruido  $\eta_m$  como una muestra independiente, más no idénticamente distribuida.**

Los coeficientes son inversamente proporcionales al factor de escala de la distribución



Valor pequeño de  $\sigma_m$   
Valor elevado de  $w_m$



Valor elevado de  $\sigma_m$   
Valor pequeño de  $w_m$

- La salida de un suavizador M viene dada por:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{m=1}^L \rho(\sqrt{w_m}(z_m - \theta)) \quad (6)$$

## Suavizadores M

Función de Densidad de Probabilidad	Suavizador M
Gaussiana $f(\eta_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}} \exp\left(-\frac{\eta_m^2}{2\sigma_m^2}\right)$	Media Ponderada $\frac{1}{L} \sum_{m=1}^L w_m z_m$
Laplaciana $f(\eta_m) = \frac{1}{2\sigma_m} \exp\left(-\frac{ \eta_m }{\sigma_m}\right)$	Mediana Ponderada $\text{MEDIANA}(w_m \diamond z_m  _{m=1}^L)$
Cauchy $f(\eta_m) = \frac{K_m}{\pi} \frac{1}{[K_m^2 + \eta_m^2]}$	Myriad Ponderado $\text{myriad}(w_m \circ z_m  _{m=1}^L; K)$

**Estos estimadores están limitados a operaciones de filtrado de tipo paso-bajo**

# Filtros M

- Un enfoque general ha sido incorporado en [9] que admite coeficientes negativos en los operadores basados en estimadores M.
  - Desacopla el signo del coeficiente de su magnitud respectiva.
  - Asigna el signo desacoplado a la muestra correspondiente.
- **Permite la implementación de operaciones de filtrado de frecuencia selectiva.**

PDF	Filtro M	Salida del Filtro
Gausiana	Filtro de Respuesta Impulsiva Finita (FIR)	$\frac{1}{L} \sum_{m=1}^M w_m z_m$ [10, 11]
Laplaciana	Filtro de Mediana Ponderada	MEDIANA( $ w_m  \diamond \text{sgn}(w_m) z_m  _{m=1}^L$ ) [9]
Cauchy	Filtro Myriad Ponderado	myriad( $ w_m  \circ \text{sgn}(w_m) z_m  _{m=1}^L; K$ ) [12]

# Filtros Recursivos en el Contexto de Estimadores M

- Considere una estructura de filtrado recursiva que captura [en el instante  $n$ ]:
  - Subconjunto de muestras de la señal de entrada, i.e.

$$\{x[n - i] \mid_{i=-N_2}^{N_1}\} = \{x_i \mid_{i=-N_2}^{N_1}\} \quad (7)$$

- Subconjunto de salidas previas, i.e.

$$\{y[n - j] \mid_{j=1}^M\} = \{y_j \mid_{j=1}^M\} \quad (8)$$

- Asumiendo que las muestras capturadas tienen un parámetro de localización común  $\theta$ , el estimador M de este parámetro de localización viene dado por:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} \rho(x_i - \theta) + \sum_{j=1}^M \rho(y_j - \theta) \right\}. \quad (9)$$

donde  $\rho(\cdot)$  es la función costo.

# Filtros Recursivos en el Contexto de Estimadores M

- Asuma que las observaciones siguen el modelo:

$$x_i = \theta + \nu_i, \text{ para } i = -N_2, \dots, N_1 \quad (10)$$

$$y_j = \theta + \xi_j, \text{ para } j = 1, \dots, M, \quad (11)$$

- Cuando las componentes de ruido aditivo se describen como muestras i.i.d. que obedecen a una distribución estadística común

Estimador M de  $\theta \rightarrow$  Estimado de Verosimilitud Máxima de  $\theta$

$$\rho(u) = -\log f(u) \quad (12)$$

- $f(u)$  es la función de densidad de probabilidad común que caracteriza tanto a las perturbaciones aditivas sobre las muestras de entrada  $\{\nu_i |_{i=-N_2}^{N_1}\}$  como a los errores de las salidas previas  $\{\xi_j |_{j=1}^M\}$ .

PDF	Filtro Recursivo	Salida del Filtro
Gausiana	Filtro Promediador Recursivo	$\frac{1}{(N_1+N_2+M+1)} \left( \sum_{i=-N_2}^{N_1} x_i + \sum_{j=1}^M y_j \right)$ [13]
Laplaciana	Filtro de Mediana Recursivo	MEDIANA( $x_i  _{i=-N_2}^{N_1}; y_j  _{j=1}^M$ ) [14, 15]

# Filtros Recursivos en el Contexto de Estimadores M

- Con el propósito de considerar las relaciones estadísticas y correlaciones temporales entre las muestras dentro de la ventana de observación recursiva, se incorpora un conjunto de coeficientes

$$\{w_m |_{m=1}^L\} = \{g_i |_{i=-N_2}^{N_1}; h_j |_{j=1}^M\}, \quad (13)$$

que ponderan la influencia de las muestras en la estimación de la salida del filtro.

- Modela las componentes de ruido aditivo como muestras independientes, más no idénticamente distribuidas:

$$\nu_i \sim f_\nu(x_i | \theta; S_i), \text{ para } i = -N_2, \dots, N_1 \quad (14)$$

$$\xi_j \sim f_\xi(y_j | \theta; S_j), \text{ para } j = 1, \dots, M. \quad (15)$$

- Usando el enfoque que admite coeficientes negativos, la definición de una clase general de filtros recursivos en el marco de los estimadores M puede describirse como:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} \rho(|g_i|(\operatorname{sgn}(g_i)x_i - \theta)) + \sum_{j=1}^M \rho(|h_j|(\operatorname{sgn}(h_j)y_j - \theta)) \right\}. \quad (16)$$

## Filtros Recursivos en el Contexto de Estimadores M

PDF	Filtro Recursivo	Salida del Filtro
Gausiana	Filtro de Respuesta Impulsiva Infinita (IIR)	$\sum_{i=-N_2}^{N_1} g_i x_i + \sum_{j=1}^M h_j y_j$ [11]
Laplaciana	Filtro Recursivo de Mediana Ponderada	MEDIANA( $ g_i  \diamond \text{sgn}(g_i)x_i _{i=-N_2}^{N_1}; \dots$ $\dots  h_j  \diamond \text{sgn}(h_j)y_j _{j=1}^M$ ) [16]

# Tabla de Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Estimadores M
- 3 Filtros Recursivos Myriad Ponderados**
- 4 Filtros Recursivos Híbridos Myriad
- 5 Filtros Recursivos Myriad-Media
- 6 Resultados y Análisis
- 7 Listado de Publicaciones
- 8 Conclusiones y Trabajo Futuro

- Dado un subconjunto de muestras de entrada  $\{x_i|_{i=-N_2}^{N_1}\}$  y un subconjunto de salidas previas  $\{y_j|_{j=1}^M\}$ .
- Considere los subconjuntos de coeficientes  $\{g_i|_{i=-N_2}^{N_1}\}$  y  $\{h_j|_{j=1}^M\}$  que ponderan la influencia de las muestras correspondientes.

### Definición

- La salida del filtro recursivo myriad ponderado es definida como

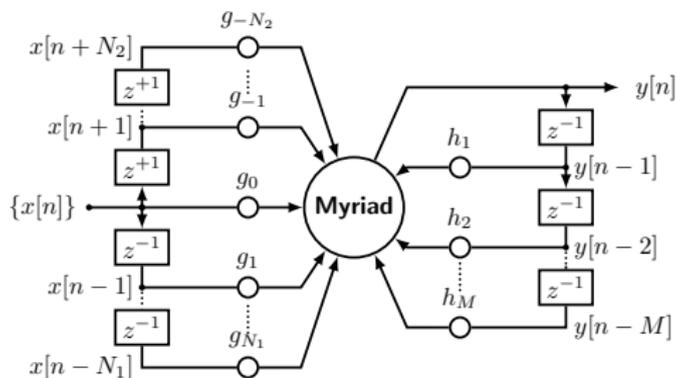
$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_{K_1, K_2} &= \text{myriad}(|g_i| \circ \text{sgn}(g_i)x_i|_{i=-N_2}^{N_1}; K_1; |h_j| \circ \text{sgn}(h_j)y_j|_{j=1}^M; K_2) \\
 &= \arg \min_{\theta} \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} \log [K_1^2 + |g_i|(\text{sgn}(g_i)x_i - \theta)^2] \right. \\
 &\quad \left. \dots + \sum_{j=1}^M \log [K_2^2 + |h_j|(\text{sgn}(h_j)y_j - \theta)^2] \right\}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

$K_1$  y  $K_2$  son parámetros que denotan la capacidad de rechazo del filtro recursivo ante el ruido impulsivo.

**El estimado de verosimilitud máxima del parámetro de localización  $\theta$  cuando las componentes de ruido aditivo [que contaminan tanto a las muestras de entrada como a las salidas previas] son modeladas usando la distribución Cauchy.**

# Filtro Recursivo Myriad Ponderado

PDF	Filtro Recursivo	Salida del Filtro
Gausiana	Filtro de Respuesta Impulsiva Infinita (IIR)	$\sum_{i=-N_2}^{N_1} g_i x_i + \sum_{j=1}^M h_j y_j$ [11]
Laplaciana	Filtro Recursivo de Mediana Ponderada	MEDIANA( $ g_i  \diamond \text{sgn}(g_i) x_i _{i=-N_2}^{N_1}; \dots$ $\dots  h_j  \diamond \text{sgn}(h_j) y_j _{j=1}^M$ ) [16]
<b>Cauchy</b>	<b>Filtro Recursivo Myriad Ponderado</b>	<b>myriad(<math> g_i  \circ \text{sgn}(g_i) x_i _{i=-N_2}^{N_1}; K_1 \dots</math> <math>\dots  h_j  \circ \text{sgn}(h_j) y_j _{j=1}^M; K_2</math>)</b>



# Propiedades

- Los parámetros independientes del filtro son las versiones normalizadas de los coeficientes

$$\left\{ \frac{g_{-N_2}}{K_1^2}, \dots, \frac{g_0}{K_1^2}, \dots, \frac{g_{N_1}}{K_1^2}, \frac{h_1}{K_2^2}, \dots, \frac{h_M}{K_2^2} \right\} \quad (18)$$

## Conjunto extendido de muestras signadas

$$\{s_m\}_{m=1}^L = \{\text{sgn}(g_{-N_2})x_{-N_2}, \dots, \text{sgn}(g_{N_1})x_{N_1}, \text{sgn}(h_1)y_1, \dots, \text{sgn}(h_M)y_M\},$$

donde  $L = N_1 + N_2 + M + 1$

- Orden estadístico del conjunto extendido de muestras signadas

$$s_{(1)} \leq s_{(2)} \leq \dots \leq s_{(L)}$$

$$s_{(1)} = \text{mín}\{s_m\}_{m=1}^L \quad \text{y} \quad s_{(L)} = \text{máx}\{s_m\}_{m=1}^L$$

- La salida del filtro recursivo myriad ponderado está restringida al intervalo definido por  $[s_{(1)}, s_{(L)}] \rightarrow$  **no amplifica las magnitudes de las muestras capturadas**
- Este filtro recursivo es un sistema estable bajo el criterio de entrada acotada y salida acotada (BIBO, *bounded-input, bounded output*).

# Propiedades

- **Propiedad de Linealidad**

$$\hat{\theta}_{\infty, \infty} = \lim_{K_1, K_2 \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{K_1, K_2} = \frac{\sum_{i=-N_1}^{N_2} g_i x_i + \sum_{j=1}^M h_j y_j}{\sum_{i=-N_2}^{N_1} |g_i| + \sum_{j=1}^M |h_j|}. \quad (19)$$

- **Propiedad Modal**

$$\hat{\theta}_{0,0} = \lim_{K_1, K_2 \rightarrow 0} \hat{\theta}_{K_1, K_2} = \arg \min_{s_{\theta} \in \mathcal{M}} \prod_{\substack{m=1, \\ s_m \neq s_{\theta}}}^L |s_m - s_{\theta}|, \quad (20)$$

$\mathcal{M}$  es el conjunto de los valores más repetidos.

- **Propiedad de no recursividad asintótica**

$$\lim_{K_2 \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{K_1, K_2} = \text{myriad} \left( |g_i| \circ \text{sgn}(g_i) x_i \Big|_{i=-N_2}^{N_1}; K_1 \right). \quad (21)$$

# Filtro Recursivo Myriad Ponderado Escalado

- El filtro recursivo myriad ponderado no tiene la capacidad de amplificar las magnitudes de las muestras dentro de la ventana de observación recursiva.
- Cuando  $K_1, K_2 \rightarrow \infty$  (propiedad de linealidad) el filtro recursivo myriad ponderado se reduce a una versión normalizada del filtro lineal IIR, cuyo factor de normalización es:

$$\tau = \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} |g_i| + \sum_{j=1}^M |h_j| \right\} \quad (22)$$

- La normalización puede removerse multiplicando la expresión de la versión normalizada del filtro IIR por el factor definido en (22)
- Extendiendo esta operación para valores finitos de  $K_1$  y  $K_2$ , se obtiene la salida de un filtro recursivo myriad ponderado escalado

$$\tilde{\theta}_{K_1, K_2} = \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} |g_i| + \sum_{j=1}^M |h_j| \right\} \hat{\theta}_{K_1, K_2}, \quad (23)$$

$\hat{\theta}_{K_1, K_2}$  es la salida del filtro recursivo myriad ponderado (versión normalizada).

# Propiedades

- Los parámetros independientes del filtro son los coeficientes “desnormalizados” en conjunto los parámetros de linealidad:

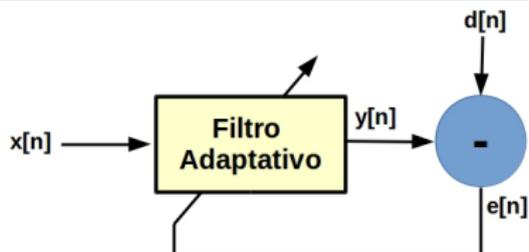
$$\left\{ g_{-N_2}, \dots, g_0, \dots, g_{N_1}, \dots, h_1, \dots, h_M, K_1, K_2 \right\}$$

- Aunque este filtro puede amplificar las magnitudes de las muestras dentro de la ventana de observación, la salida de la versión escalada está limitada al intervalo

$$[\tau^{S(1)}, \tau^{S(L)}] \quad (24)$$

- Por tanto, si  $\tau < \infty$ , este filtro es un sistema estable bajo el criterio BIBO.

# Algoritmos Adaptativos



- Error medio absoluto como criterio de desempeño a ser minimizado.
- Conlleva a la minimización de la función costo:

$$J(\mathbf{g}, \mathbf{h}, K_1, K_2) = E \{|e[n]|\} = E \{|y[n] - d[n]|\}, \quad (25)$$

- Este enfoque ha sido usado en el diseño de filtros basados en mediana [9, 16]
- La minimización directa de la función costo no conduce a una expresión cerrada, por tanto, **se recurre un enfoque de descenso escalonado (steepest descent):**

$$\begin{aligned} g_i[n+1] &= g_i[n] + \mu \left[ -\frac{\partial}{\partial g_i} J(\mathbf{g}, \mathbf{h}, K_1, K_2) \right], \quad i = -N_2, \dots, N_1, \\ h_j[n+1] &= h_j[n] + \mu \left[ -\frac{\partial}{\partial h_j} J(\mathbf{g}, \mathbf{h}, K_1, K_2) \right], \quad j = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (26)$$

# Algoritmos Adaptativos

- Derivada parcial de la función costo con respecto a cada coeficiente:

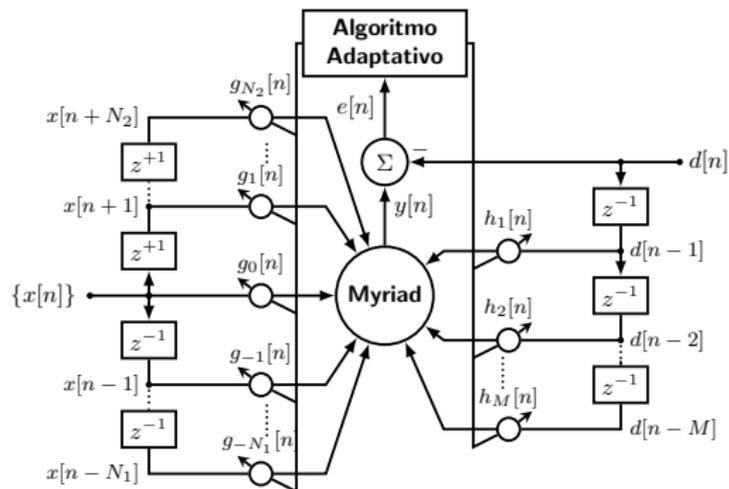
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial g_i} J(\mathbf{g}, \mathbf{h}, K_1, K_2) &= E \left\{ \operatorname{sgn}(e[n]) \frac{\partial y}{\partial g_i} \right\}, \quad i = -N_2, \dots, N_1, \\ \frac{\partial}{\partial h_j} J(\mathbf{g}, \mathbf{h}, K_1, K_2) &= E \left\{ \operatorname{sgn}(e[n]) \frac{\partial y}{\partial h_j} \right\}, \quad j = 1, \dots, M.\end{aligned}\quad (27)$$

- La información estadística de la salida del filtro generalmente no está disponible, en consecuencia, la esperanza matemática no puede evaluarse.
- Se recurre al estimado instantáneo de la derivada parcial de la función con respecto a cada coeficiente, donde la actualización iterativa de cada coeficiente se reduce a:

$$\begin{aligned}g_i[n+1] &= g_i[n] - \mu \left[ \operatorname{sgn}(e[n]) \frac{\partial y}{\partial g_i} [n] \right], \quad i = -N_2, \dots, N_1, \\ h_j[n+1] &= h_j[n] - \mu \left[ \operatorname{sgn}(e[n]) \frac{\partial y}{\partial h_j} [n] \right], \quad j = 1, \dots, M.\end{aligned}\quad (28)$$

# Formulación de la ecuación de error

- La evaluación de las derivadas  $\left( \frac{\partial y}{\partial g_i} [n], \frac{\partial y}{\partial h_j} [n] \right)$  es un problema intratable debido a la realimentación de las salidas previas.
- El enfoque de formulación de la ecuación de error [17]:
  - Sustituye las salidas previas  $\{y[n-j] \}_{j=1}^M$  por las componentes previas de la respuesta deseada  $\{d[n-j] \}_{j=1}^M$ .



# Algoritmos Adaptativos

## Filtros Recursivos Myriad Ponderados

- La salida del filtro en el marco de la formulación de la ecuación de error:

$$\hat{y}[n] = \arg \min_{\theta} \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} \log [K_1^2 + |g_i| (\operatorname{sgn}(g_i)x_i - \theta)^2] + \sum_{j=1}^M \log [K_2^2 + |h_j| (\operatorname{sgn}(h_j)d_j - \theta)^2] \right\}$$

$$g_i[n+1] = g_i[n] - \mu \left[ \operatorname{sgn}(e[n]) \frac{\partial y}{\partial g_i}[n] \right], \quad i = -N_2, \dots, N_1,$$

$$h_j[n+1] = h_j[n] - \mu \left[ \operatorname{sgn}(e[n]) \frac{\partial y}{\partial h_j}[n] \right], \quad j = 1, \dots, M.$$

- Las expresiones de las derivadas instantáneas:

$$\frac{\partial}{\partial g_i} \hat{\theta} = - \frac{\frac{K_1^2 \operatorname{sgn}(g_i)(\bar{\theta} - \operatorname{sgn}(g_i)x_i)}{[K_1^2 + |g_i|(\operatorname{sgn}(g_i)x_i - \bar{\theta})^2]^2}}{\sum_{i=-N_2}^{N_1} |g_i| \frac{K_1^2 - |g_i|(\operatorname{sgn}(g_i)x_i - \bar{\theta})^2}{[K_1^2 + |g_i|(\operatorname{sgn}(g_i)x_i - \bar{\theta})^2]^2} + \sum_{j=1}^M |h_j| \frac{K_2^2 - |h_j|(\operatorname{sgn}(h_j)d_j - \bar{\theta})^2}{[K_2^2 + |h_j|(\operatorname{sgn}(h_j)d_j - \bar{\theta})^2]^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial h_j} \hat{\theta} = - \frac{\frac{K_2^2 \operatorname{sgn}(h_j)(\bar{\theta} - \operatorname{sgn}(h_j)d_j)}{[K_2^2 + |h_j|(\operatorname{sgn}(h_j)d_j - \bar{\theta})^2]^2}}{\sum_{i=-N_2}^{N_1} |g_i| \frac{K_1^2 - |g_i|(\operatorname{sgn}(g_i)x_i - \bar{\theta})^2}{[K_1^2 + |g_i|(\operatorname{sgn}(g_i)x_i - \bar{\theta})^2]^2} + \sum_{j=1}^M |h_j| \frac{K_2^2 - |h_j|(\operatorname{sgn}(h_j)d_j - \bar{\theta})^2}{[K_2^2 + |h_j|(\operatorname{sgn}(h_j)d_j - \bar{\theta})^2]^2}}$$

# Filtros Recursivos en el Contexto de Estimadores M

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} \rho(|g_i|(\operatorname{sgn}(g_i)x_i - \theta)) + \sum_{j=1}^M \rho(|h_j|(\operatorname{sgn}(h_j)y_j - \theta)) \right\}$$

- Aplican la misma función costo  $\rho(\cdot)$  tanto a las muestras de entrada como a las salidas previas.
- Derivado del uso de las mismas distribuciones en el modelado del ruido que afecta tanto a las muestras de entrada como a las salidas previas, i.e.  $f_{\nu}(u) = f_{\xi}(u)$
- Los filtros recursivos pueden extenderse a un caso general, donde  $f_{\nu}(u) \neq f_{\xi}(u)$

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} \rho_n(|g_i|(\operatorname{sgn}(g_i)x_i - \theta)) + \sum_{j=1}^M \rho_r(|h_j|(\operatorname{sgn}(h_j)y_j - \theta)) \right\}$$

**Considera que el proceso de filtrado modifica el modelo estadístico que caracteriza a los errores aditivos que afectan a las salidas previas**

# Tabla de Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Estimadores M
- 3 Filtros Recursivos Myriad Ponderados
- 4 Filtros Recursivos Híbridos Myriad**
- 5 Filtros Recursivos Myriad-Media
- 6 Resultados y Análisis
- 7 Listado de Publicaciones
- 8 Conclusiones y Trabajo Futuro

# Filtros Recursivos Híbridos Myriad

- Asume que el ruido sobre las salidas previas ha sido atenuado hasta cierto nivel.
- Basado en el hecho de que el estimado myriad tiende asintóticamente hacia una distribución normal [18, 19, 20, 21].

## Definición

- La salida del filtro recursivo híbrido myriad viene dada por:

$$\hat{\theta}_K = \text{RHM}_{\text{y}}(|g_i| \bullet \text{sgn}(g_i)x_i|_{i=-N_2}^{N_1}, K; |h_j| \bullet \text{sgn}(h_j)y_j|_{j=1}^M)$$

$$= \arg \min_{\theta} \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} \log \left[ K^2 + |g_i| (\text{sgn}(g_i)x_i - \theta)^2 \right] + \sum_{j=1}^M |h_j| (\text{sgn}(h_j)y_j - \theta)^2 \right\}.$$

- es el operador de ponderación y  $K$  controla la capacidad de rechazo ante el ruido impulsivo que afecta las muestras de entrada.

**Es el estimado de verosimilitud máxima del parámetro de localización  $\theta$  cuando las componentes de ruido aditivo que contaminan a las muestras de entrada siguen una distribución Cauchy y los errores aditivos de las salidas previas obedecen a una distribución Gaussiana.**

# Propiedades

## Conjunto extendido de muestras signadas

$$\{s_m\}_{m=1}^L = \{\text{sgn}(g_{-N_2})x_{-N_2}, \dots, \text{sgn}(g_{N_1})x_{N_1}, \text{sgn}(h_1)y_1, \dots, \text{sgn}(h_M)y_M\},$$

donde  $L = N_1 + N_2 + M + 1$

- Orden estadístico del conjunto extendido de muestras signadas

$$s(1) \leq s(2) \leq \dots \leq s(L)$$

$$s(1) = \text{mín}\{s_m\}_{m=1}^L \quad \text{y} \quad s(L) = \text{máx}\{s_m\}_{m=1}^L$$

- La salida del filtro recursivo híbrido myriad está restringida al intervalo definido por  $[s(1), s(L)] \rightarrow$  **no amplifica las magnitudes de las muestras capturadas**
- El filtro recursivo híbrido myriad es un sistema estable bajo el criterio de entrada acotada y salida acotada (BIBO, *bounded-input, bounded output*).

# Algoritmos de Búsqueda de Puntos Fijos para el Cálculo de la Salida del Filtro Recursivo Híbrido Myriad

- La salida del filtro recursivo híbrido myriad es el valor de  $\theta$  que minimiza la función costo:

$$\mathcal{F}(\theta) = \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} \log \left[ K^2 + |g_i| (\text{sgn}(g_i)x_i - \theta)^2 \right] + \sum_{j=1}^M |h_j| (\text{sgn}(h_j)y_j - \theta)^2 \right\} \quad (29)$$

- La función costo, en general, tiene múltiples mínimos locales, por tanto, **La determinación de la salida del filtro a partir de la minimización directa  $\mathcal{F}(\theta)$  es un problema computacionalmente costoso.**
- Se recurre al enfoque de búsqueda de los mínimos locales de la función costo, donde la salida corresponde con el mínimo local que minimice  $\mathcal{F}(\theta)$
- La determinación de los mínimos locales se realiza usando un algoritmo de iteraciones de punto fijo [22]:

$$\theta_{q+1} = \mathcal{L}(\theta_q) = \frac{\sum_{i=-N_2}^{N_1} \frac{|g_i| \text{sgn}(g_i)x_i}{K^2 + |g_i| (\text{sgn}(g_i)x_i - \theta_q)^2} + \sum_{j=1}^M |h_j| \text{sgn}(h_j)y_j}{\sum_{i=-N_2}^{N_1} \frac{|g_i|}{K^2 + |g_i| (\text{sgn}(g_i)x_i - \theta_q)^2} + \sum_{j=1}^M |h_j|} \quad (30)$$

# Algoritmos de Búsqueda de Puntos Fijos para el Cálculo de la Salida del Filtro Recursivo Híbrido Myriad

Considerando el algoritmo de iteraciones de puntos fijos para la determinación de los mínimos locales de  $\mathcal{F}(\theta)$ :

$$\theta_{q+1} = \mathcal{L}(\theta_q) = \frac{\sum_{i=-N_2}^{N_1} \frac{|g_i| \operatorname{sgn}(g_i) x_i}{K^2 + |g_i| (\operatorname{sgn}(g_i) x_i - \theta_q)^2} + \sum_{j=1}^M |h_j| \operatorname{sgn}(h_j) y_j}{\sum_{i=-N_2}^{N_1} \frac{|g_i|}{K^2 + |g_i| (\operatorname{sgn}(g_i) x_i - \theta_q)^2} + \sum_{j=1}^M |h_j|}.$$

## Algoritmo de búsqueda de puntos fijos I (IPF-I)

La salida del filtro está en el rango de valores de las muestras de entrada [Preciso].

$$\hat{\theta}_{IPF-I} = \arg \min_{\mathcal{L}^{(P)}(s_m)} \mathcal{F} \left( \mathcal{L}^{(P)}(s_m) \right). \quad (31)$$

## Algoritmo de búsqueda de puntos fijos II (IPF-II)

Asume que la muestra que minimiza  $\mathcal{F}(\theta)$  es la más cercana al mínimo global [Rápido].

$$\hat{\theta}_{IPF-II} = \mathcal{L}^{(P)} \left( \arg \min_{s_m} \mathcal{F}(s_m) \right). \quad (32)$$

## Filtro Recursivo Híbrido Myriad Escalado

- El filtro recursivo híbrido myriad no amplifica las magnitudes de las muestras capturadas.
- Siguiendo un enfoque similar al usado con los filtros recursivos myriad ponderado, se propone la versión escalada del filtro recursivo híbrido myriad:

$$\tilde{\theta} = \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} |g_i| + \sum_{j=1}^M |h_j| \right\} \hat{\theta}, \quad (33)$$

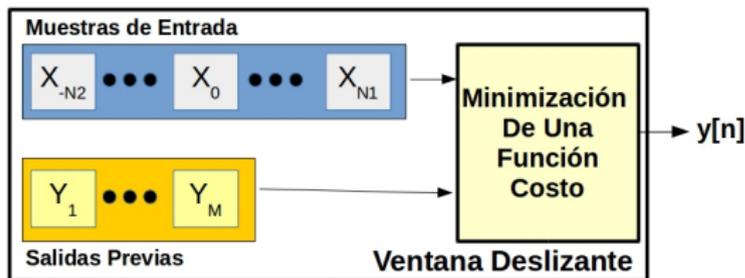
$\hat{\theta}$  es la salida del filtro recursivo híbrido myriad (normalizado).

## Algoritmos Adaptativos

- Algoritmos de mínima media absoluta (LMA, *least mean absolute*).
- Error medio absoluto como criterio de desempeño a minimizarse.
- Desarrollados bajo el enfoque de descenso escalonado.
- Incorpora la formulación de la ecuación de error como estrategia de desacoplamiento.

## Filtros Recursivos en el Contexto de Estimadores M

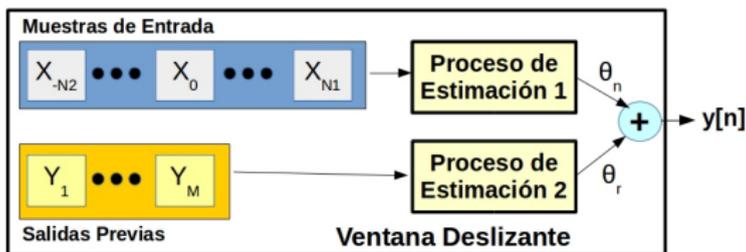
PDF	Filtro Recursivo	Salida del Filtro
Gausiana	Filtro de Respuesta Impulsiva Infinita (IIR)	$\sum_{i=-N_2}^{N_1} g_i x_i + \sum_{j=1}^M h_j y_j$ [11]
Laplaciana	Filtro Recursivo de Mediana Ponderada	MEDIANA( $ g_i  \diamond \text{sgn}(g_i)x_i _{i=-N_2}^{N_1}; \dots$ $\dots  h_j  \diamond \text{sgn}(h_j)y_j _{j=1}^M$ ) [16]
Cauchy	Filtro Recursivo Myriad Ponderado	myriad( $ g_i  \circ \text{sgn}(g_i)x_i _{i=-N_2}^{N_1}; K_1 \dots$ $\dots  h_j  \circ \text{sgn}(h_j)y_j _{j=1}^M; K_2$ )
Cauchy-Gausiana	Filtro Recursivo Híbrido Myriad	RHMy( $ g_i  \bullet \text{sgn}(g_i)x_i _{i=-N_2}^{N_1}; K_1 \dots$ $\dots  h_j  \bullet \text{sgn}(h_j)y_j _{j=1}^M$ )



La salida se obtiene a partir de la minimización de una única función costo que determina un parámetro de localización común

# Filtros Recursivos en el Contexto de Estimadores M

- Considere los beneficios del uso de modelos estadísticos diferentes en la caracterización del ruido que contamina las muestras observadas.
- Se presenta **una nueva clase de filtros recursivos cuya salida se obtiene como la suma de dos procesos de estimación independientes** [uno actuando sobre las muestras de entrada y el otro sobre las salidas previas]:



- En otras palabras:

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta} &= c_n \hat{\theta}_n + c_r \hat{\theta}_r \\
 &= c_n \arg \min_{\theta_n} \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} \rho_n(|g_i|(\operatorname{sgn}(g_i)x_i - \theta_n)) \right\} \\
 \dots + & c_r \arg \min_{\theta_r} \left\{ \sum_{j=1}^M \rho_r(|h_j|(\operatorname{sgn}(h_j)y_j - \theta_r)) \right\}
 \end{aligned} \tag{34}$$

# Tabla de Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Estimadores M
- 3 Filtros Recursivos Myriad Ponderados
- 4 Filtros Recursivos Híbridos Myriad
- 5 Filtros Recursivos Myriad-Media**
- 6 Resultados y Análisis
- 7 Listado de Publicaciones
- 8 Conclusiones y Trabajo Futuro

# Filtros Recursivos Myriad-Media

## Definición

- La salida de un filtro recursivo myriad-mean viene dada por:

$$y[n] = \frac{1}{\beta} \left[ \left( \sum_{i=-N_2}^{N_1} |g_i| \right) \arg \min_{\theta_n} \left\{ \sum_{i=-N_2}^{N_1} \log \left[ K^2 + |g_i| (\operatorname{sgn}(g_i)x_i - \theta_n)^2 \right] \right\} \right. \\ \left. + \left( \sum_{j=1}^M |h_j| \right) \arg \min_{\theta_r} \left\{ \sum_{j=1}^M |h_j| (\operatorname{sgn}(h_j)y_j - \theta_r)^2 \right\} \right] \quad (35)$$

o equivalentemente

$$y[n] = \frac{1}{\beta} \left[ \left( \sum_{i=-N_2}^{N_1} |g_i| \right) \operatorname{myriad} \left( |g_i| \circ \operatorname{sgn}(g_i)x_i \Big|_{i=-N_2}^{N_1}; K \right) + \sum_{j=1}^M h_j y_j \right] \quad (36)$$

donde  $\beta = \left( \sum_{i=-N_2}^{N_1} |g_i| + \sum_{j=1}^M |h_j| \right)$  es un factor de normalización.

- El myriad ponderado es el estimado de verosimilitud máxima cuando las componentes de ruido sobre las muestras de entrada siguen un modelo estadístico Cauchy
- La media ponderada es el estimado de verosimilitud máxima cuando las perturbaciones aditivas sobre las salidas previas obedecen a una distribución Gaussiana

# Propiedades

- Los parámetros independientes del filtro corresponden con los coeficientes del filtro más el parámetro de linealidad  $K$  del operador myriad ponderado.
- Considerando las propiedades del filtro myriad ponderado no recursivo:
  - Cuando  $K \rightarrow \infty$  [versión normalizada del filtro IIR]:

$$y[n]_{k \rightarrow \infty} = \frac{\sum_{i=-N_2}^{N_1} g_i x_i + \sum_{j=1}^M h_j y_j}{\sum_{i=-N_2}^{N_1} |g_i| + \sum_{j=1}^M |h_j|}, \quad (37)$$

- Cuando  $K \rightarrow 0$  la salida se reduce a la suma del promedio ponderado de las salidas previas y la moda de las muestras de entrada.
- El filtro recursivo myriad-media es un sistema estable bajo el criterio BIBO.

## Filtro Recursivo Myriad-Media Escalado

La versión escalada del filtro se obtiene eliminando el factor de normalización:

$$y[n] = \left( \sum_{i=-N_2}^{N_1} |g_i| \right) \text{myriad} \left( |g_i| \circ \text{sgn}(g_i) x_i \Big|_{i=-N_2}^{N_1}; K \right) + \sum_{j=1}^M h_j y_j. \quad (38)$$

- La versión escalada no es un sistema estable bajo el criterio BIBO.

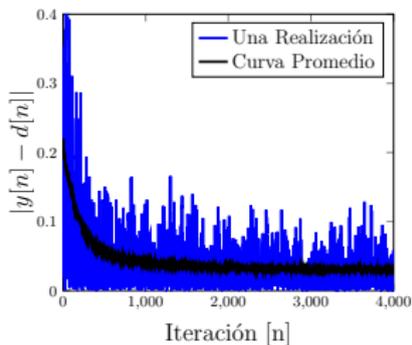
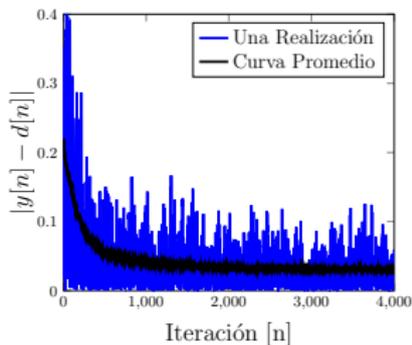
## Algoritmos Adaptativos

- Algoritmos de mínima media absoluta (LMA, *least mean absolute*).
- Error medio absoluto como criterio de desempeño a minimizarse.
- Desarrollados bajo el enfoque de descenso escalonado.
- Incorpora la formulación de la ecuación de error como estrategia de desacoplamiento.
- En la etapa de entrenamiento de la versión escalada se debe verificar que los polos de la parte recursiva del filtro residan dentro del círculo unitario del plano  $z$

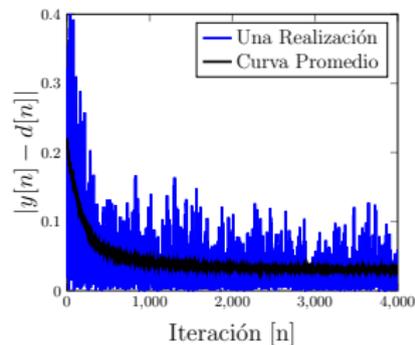
# Tabla de Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Estimadores M
- 3 Filtros Recursivos Myriad Ponderados
- 4 Filtros Recursivos Híbridos Myriad
- 5 Filtros Recursivos Myriad-Media
- 6 Resultados y Análisis**
- 7 Listado de Publicaciones
- 8 Conclusiones y Trabajo Futuro

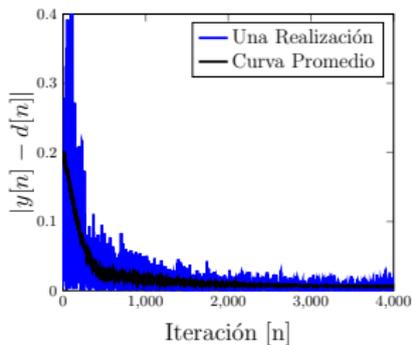
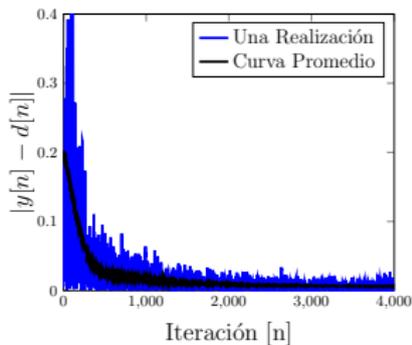
# Etapa de Entrenamiento de los Filtros

RWM<sub>y</sub>

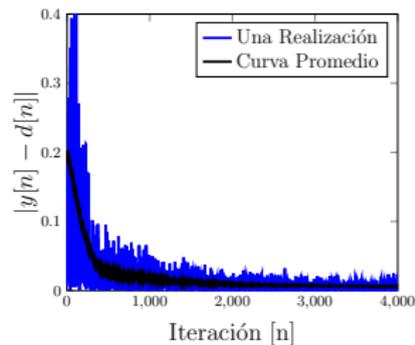
RHMy



RMyM

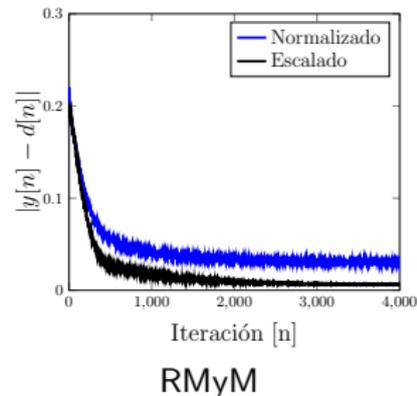
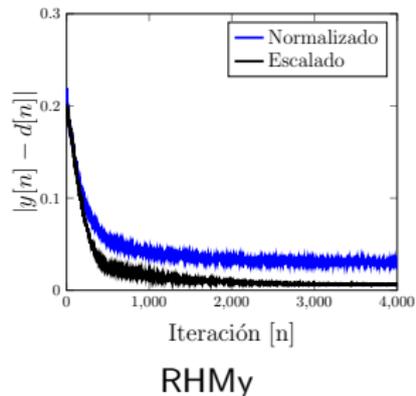
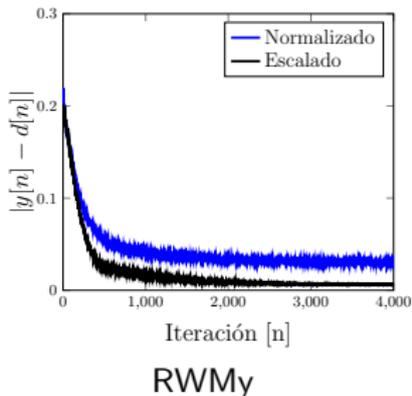
SRWM<sub>y</sub>

SRHMy

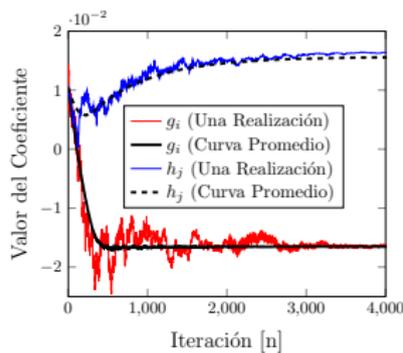


SRMyM

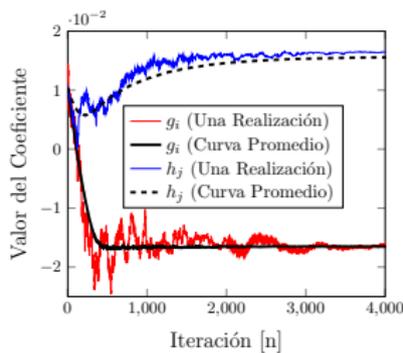
## Etapa de Entrenamiento de los Filtros (II)



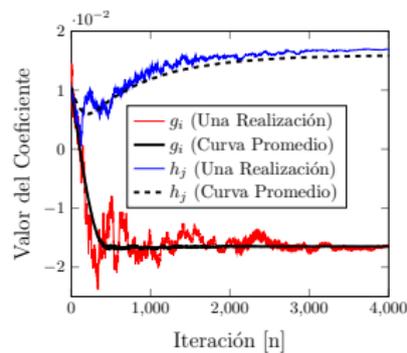
## Etapa de Entrenamiento de los Filtros (III)



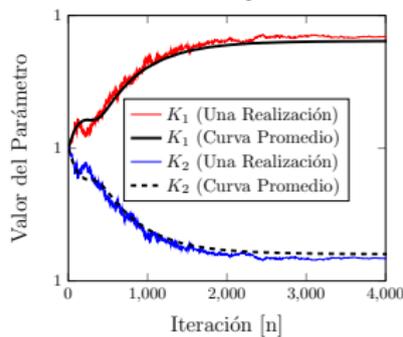
SRWMy



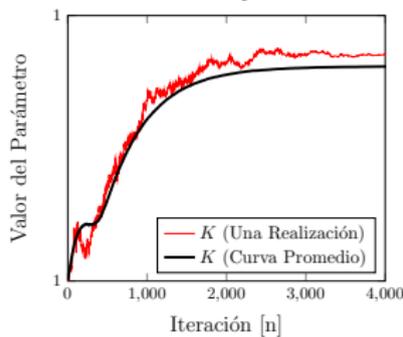
SRHMy



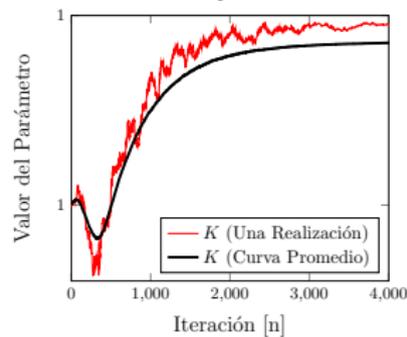
SRMyM



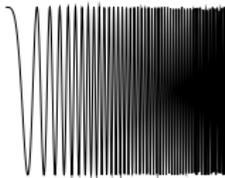
SRWMy



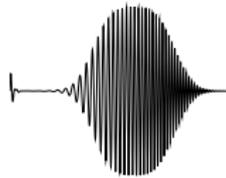
SRHMy



SRMyM



Original



FIR



IIR



WMy [12]



DWITM [23]



RWM [16]



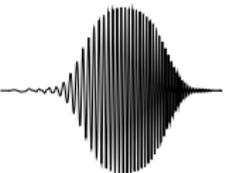
RWMMy



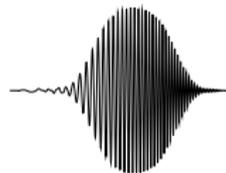
RHMy



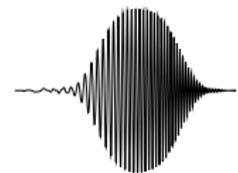
RMyM



SRWMMy



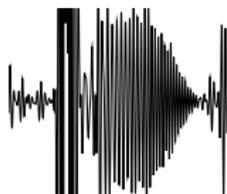
SRHMy



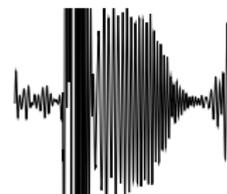
SRMyM



Señal Ruidosa



FIR



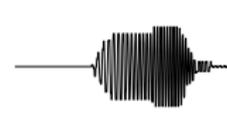
IIR



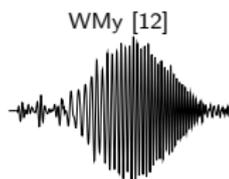
WMy [12]



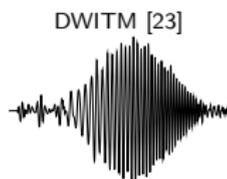
DWITM [23]



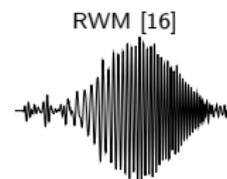
RWM [16]



RWMMy



RHMy



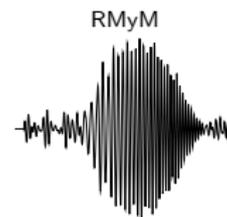
RMyM



SRWMMy



SRHMy



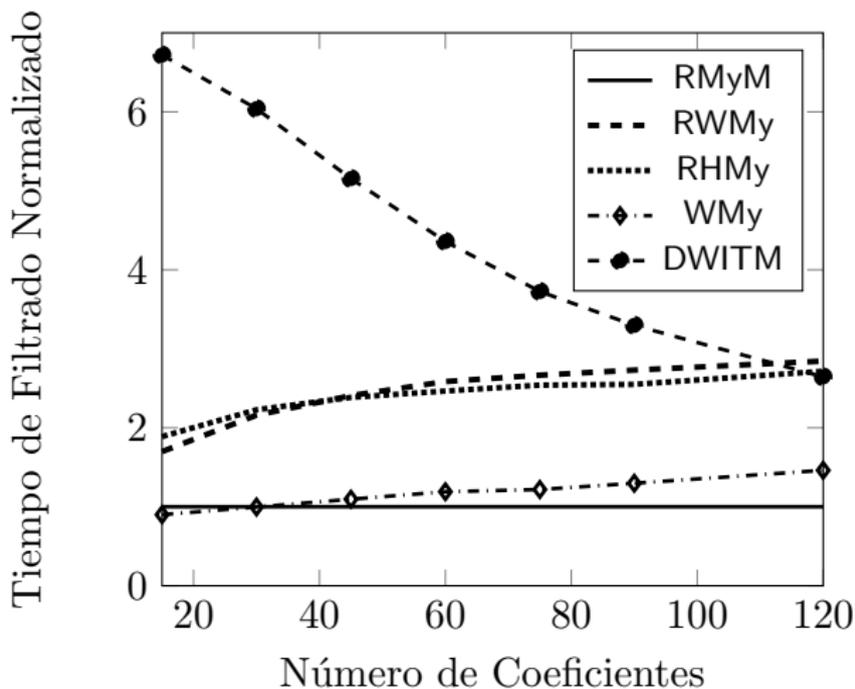
SRMyM

# Rendimiento Ante Ruido Impulsivo

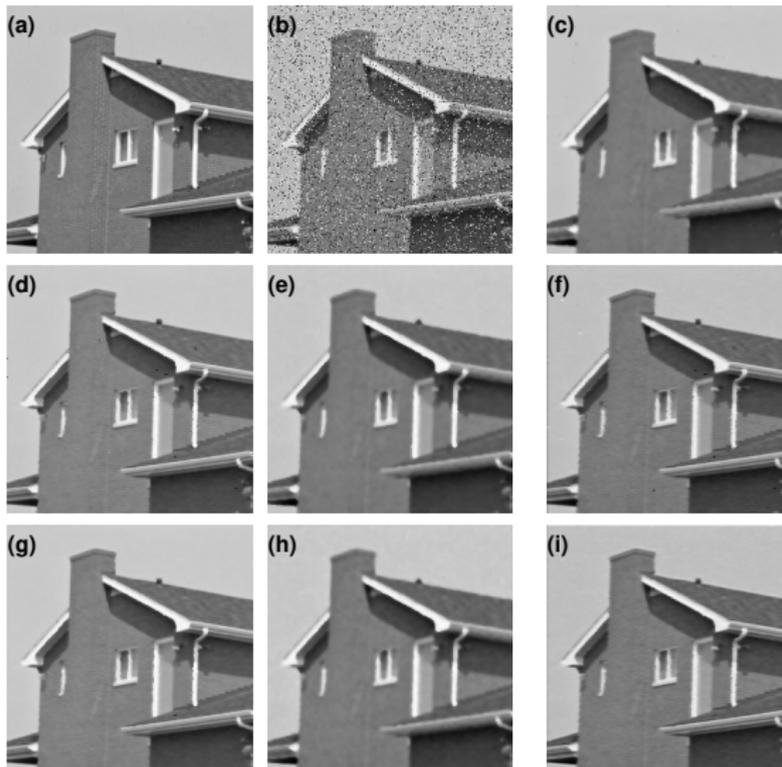
MAE de la señal chirp filtrada ante ruido aditivo

Filtro	$\alpha = 0,75$	$\alpha = 1,00$	$\alpha = 1,50$	$\alpha = 2,00$	Laplaciano
FIR	12.8131	0.6165	0.1244	<b>0.0684</b>	<b>0.0683</b>
IIR	13.7769	0.6497	0.1405	0.0861	0.0862
DWITM [23]	0.0862	0.0847	0.0833	0.0844	0.0826
RWM [16]	0.1277	0.1265	0.1195	0.1137	0.1120
WMy [12]	0.1899	0.2024	0.1845	0.1681	0.1793
RWMy	0.0785	0.0803	0.0799	0.0814	0.0804
SRWMy	<b>0.0603</b>	<b>0.0605</b>	<b>0.0645</b>	<b>0.0653</b>	<b>0.0616</b>
RHMy	<b>0.0772</b>	0.0792	0.0767	0.0768	0.0769
SRWMy	0.0780	0.0798	<b>0.0763</b>	0.0753	0.0735
RMyM	0.0873	0.0834	0.0845	0.0804	0.0857
SRMyM	0.0822	<b>0.0773</b>	0.0768	0.0727	0.0731

## Costo Computacional de los Filtros Recursivos Propuestos



# Remoción de Ruido Sal y Pimienta en Imágenes

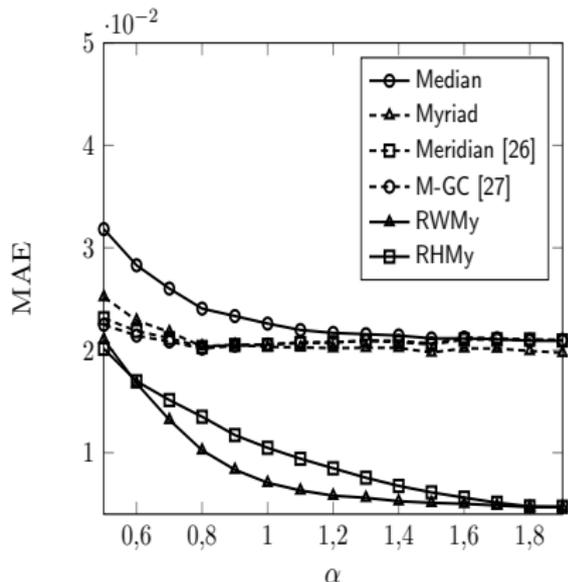
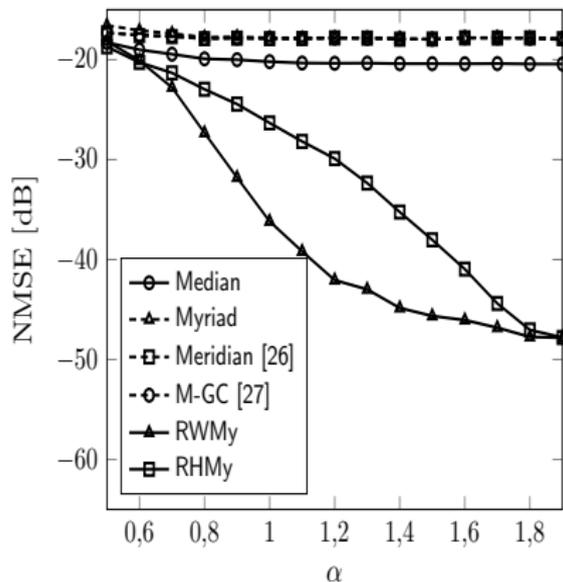


MAE, MSE, PSNR y tiempo de filtrado en la remoción de ruido sal y pimienta de la imagen “House” a una densidad de ruido de  $\varepsilon = 10\%$

Filtro	MAE	MSE	PSNR[dB]	Tiempo de filtrado (s)
ITM [24]	4.4102	64.560	30.032	25.119
ITTM [25]	4.5755	70.024	29.679	15.650
RWMy	<b>2.5104</b>	<b>38.621</b>	<b>32.272</b>	21.165
RHMy	4.5738	62.068	30.203	20.089
RMyM	4.3996	43.741	31.724	<b>9.8152</b>
SRWMy	4.7332	90.737	28.561	20.929
SRHMy	4.8747	65.866	29.945	19.800
SRMyM	<b>3.3077</b>	<b>37.084</b>	<b>32.441</b>	<b>9.5538</b>

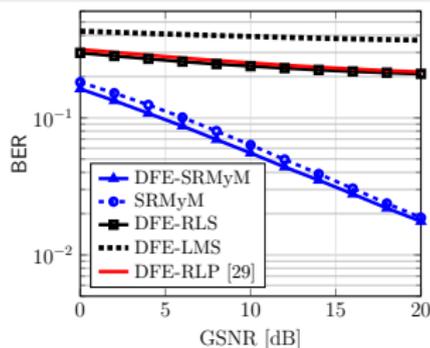
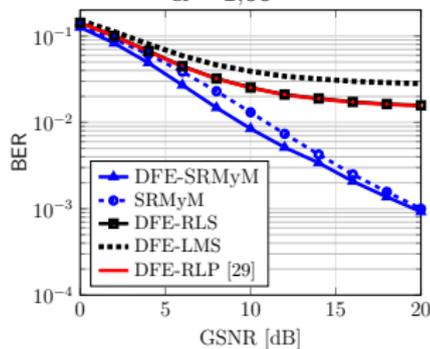
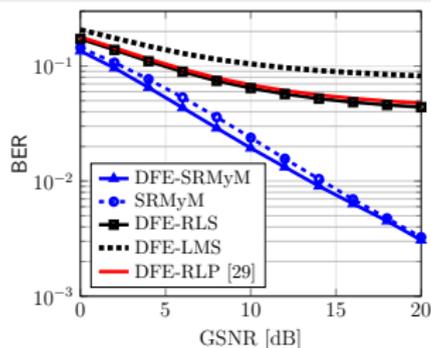
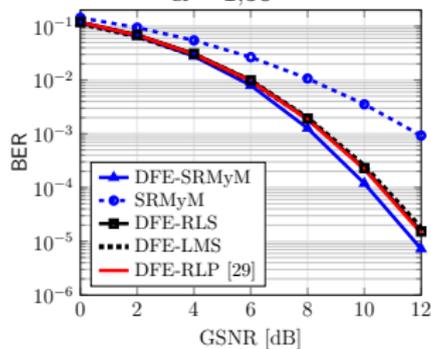


## Comunicaciones a Través Líneas de Potencia





# Ecuador de Decisión Realimentado Basado en el Filtro Recursivo Myriad-Media Escalado

 $\alpha = 1,00$  $\alpha = 1,75$  $\alpha = 1,50$  $\alpha = 2,00$

# Tabla de Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Estimadores M
- 3 Filtros Recursivos Myriad Ponderados
- 4 Filtros Recursivos Híbridos Myriad
- 5 Filtros Recursivos Myriad-Media
- 6 Resultados y Análisis
- 7 Listado de Publicaciones**
- 8 Conclusiones y Trabajo Futuro

# Listado de Publicaciones

- ① Juan Marcos Ramírez y José Luis Paredes, Robust Sparse Signal Recovery based on Weighted Median Operator" *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2014)*, pp. 1050-1054, Milán, Italia, Mayo, 2014.
- ② Juan Marcos Ramírez y José Luis Paredes, Robust Transforms based on the Weighted Median Operator" *IEEE Signal Processing Letters*, vol 22, No. 1, pp. 120-124, Enero, 2015.
- ③ Juan Marcos Ramírez y José Luis Paredes, Recursive Myriad Based Filters and Their Optimizations" *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol 64, No. 15, pp. 4027-4039, Agosto, 2016.

## Investigación Reproducible

<https://github.com/JuanMarcosRamirez/RecursiveMyriadBasedFilters>

- ④ Juan Marcos Ramírez y José Luis Paredes, Recursive Myriad-Mean Filters: Adaptive Algorithms and Applications", **sometido a revisión en la revista *Signal Processing***.
- ⑤ Jerick Órdenes, Juan Marcos Ramírez y José Luis Paredes, Robust Image Processing Using Median Based Sparse Signal Representation", **en progreso**.

# Tabla de Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Estimadores M
- 3 Filtros Recursivos Myriad Ponderados
- 4 Filtros Recursivos Híbridos Myriad
- 5 Filtros Recursivos Myriad-Media
- 6 Resultados y Análisis
- 7 Listado de Publicaciones
- 8 Conclusiones y Trabajo Futuro**

# Conclusiones

- El Filtro Recursivo Myriad Ponderado:
  - Basado en el modelado del ruido aditivo usando una distribución Cauchy
  - Casos particulares:
    - El filtro lineal IIR
    - El filtro de moda muestral recursivo
    - El filtro myriad ponderado no recursivo
  - El Filtro Recursivo Myriad Ponderado Escalado (Versión Escalada)
  - Algoritmos Adaptativos
    - Algoritmos de mínima media absoluta (LMA)
    - Enfoque de descenso escalonado (*steepest descent*)
    - Formulación de la ecuación de error
- El Filtro Recursivo Híbrido Myriad
  - Modelado del ruido aditivo usando las distribuciones Cauchy y Gaussiana
  - Algoritmos de búsqueda de puntos fijos para el cálculo de la salida del filtro
  - El filtro recursivo híbrido myriad escalado
  - Algoritmos adaptativos

# Conclusiones

- El Filtro Recursivo Myriad-Media
  - Obtiene su salida como la suma de dos estimadores independientes y desacoplados
  - Modelado del ruido aditivo usando las distribuciones Gaussiana y Cauchy
  - El filtro recursivo myriad-media escalado
  - Algoritmos adaptativos
  - Ecuador de decisión realimentado basado en el filtro recursivo myriad-media escalado
- Evaluación de las estructuras recursivas basadas en el operador myriad ponderado
  - Comportamiento de los algoritmos adaptativos
  - Operaciones de filtrado de frecuencia selectiva sobre señales sintéticas
  - Remoción de ruido sal y pimienta en imágenes convencionales
  - Filtrado de señales transmitidas a través de líneas de potencia
  - Estimación de canales de comunicaciones en la presencia de ruido impulsivo

# Trabajo Futuro

- Incorporar las estructuras de filtrado basadas en el operador myriad ponderado en la remoción de ruido dependiente de la magnitud señal (Ruido Ricciano y Ruido Poisson).
  - Imágenes médicas.
  - Imágenes astronómicas.
- Evaluar el comportamiento de los filtros en bases de datos tridimensionales (3D).
  - Tomografía computarizada multicorte.
  - Imágenes multi-espectrales e hiperespectrales (imágenes satelitales).
- Explorar técnicas alternativas para la aceleración del cálculo de la salida del filtro recursivo híbrido myriad.
- Incorporar nuevos modelos de ruido en el desarrollo de estructuras recursivas desacopladas, de modo similar a lo realizado con el filtro recursivo myriad-media.

# ¿Preguntas?

¡Gracias por su atención!

# Referencias I



D. Middleton. "Statistical-Physical Models of Electromagnetic Interference". En: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility EMC-19.3* (ago. de 1977), págs. 106-127.



A. Spaulding y D. Middleton. "Optimum Reception in an Impulsive Interference Environment - Part I: Coherent Detection". En: *IEEE Transactions on Communications* 25.9 (sep. de 1977), págs. 910-923.



Juan Guillermo Gonzalez. "Robust Techniques for Wireless Communications in Non-gaussian Environments". Tesis doct. Newark, DE, USA: University of Delaware, 1997.



Juan G Gonzalez y Gonzalo R Arce. "Optimality of the myriad filter in practical impulsive-noise environments". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 49.2 (feb. de 2001), págs. 438-441.



Juan G Gonzalez, David W Griffith y Gonzalo R Arce. "Matched myriad filtering for robust communications". En: *Proceedings of the 1996 CISS*. 1996.



Igor Djurović, LJubiša Stanković y Johann F Böhme. "Myriad filter based form of the DFT". En: *Proceedings of the 11th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2002)*. Vol. III. 2002, págs. 433-436.

# Referencias II



Tomasz Pander. "Application of weighted myriad filters to suppress impulsive noise in biomedical signals". En: *TASK Quarterly* 8.2 (2004), págs. 199-216.



Juan Ramírez y José Paredes. "Regresión Lineal Basada en Myriad Muestral". En: *Simulación y Modelado en Ingeniería y Ciencias, Memorias del Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas (CIMENICS 2006)*. 2006, TM81-TM88.



Gonzalo R Arce. "A general weighted median filter structure admitting negative weights". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 46.12 (dic. de 1998), págs. 3195-3205.



Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer y John R. Buck. *Discrete-time signal processing*. Prentice Hall signal processing series. Upper Saddle River, N.J. Prentice Hall, 1999.



John G. Proakis y Dimitris K. Manolakis. *Digital Signal Processing (4th Edition)*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 2006.



Sudhakar Kalluri y Gonzalo R Arce. "Robust frequency-selective filtering using weighted myriad filters admitting real-valued weights". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 49.11 (nov. de 2001), págs. 2721-2733.

# Referencias III



Steven W. Smith. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. San Diego, CA, USA: California Technical Publishing, 1997.



Gonzalo R Arce. "Statistical threshold decomposition for recursive and nonrecursive median filters". En: *IEEE Transactions on Information Theory* 32.2 (mar. de 1986), págs. 243-253.



Gonzalo R Arce y Neal C Gallagher Jr. "Stochastic analysis for the recursive median filter process". En: *IEEE Transactions on Information Theory* 34.4 (jul. de 1988), págs. 669-679.



Gonzalo R Arce y Jose Luis Paredes. "Recursive weighted median filters admitting negative weights and their optimization". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 48.3 (mar. de 2000), págs. 768-779.



John J Shynk. "Adaptive IIR filtering". En: *IEEE ASSP Magazine* 6.2 (abr. de 1989), págs. 4-21.



Alexey A Roenko, Vladimir V Lukin e Igor Djurovic. "Two approaches to adaptation of sample myriad to characteristics of  $S\alpha S$  distribution data". En: *Signal Processing* 90.7 (2010), págs. 2113-2123.

# Referencias IV



P.J. Huber y E.M. Ronchetti. *Robust Statistics*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2009.



Juan G Gonzalez y Gonzalo R Arce. "Statistically-efficient filtering in impulsive environments: weighted myriad filters". En: *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* 2002.1 (ene. de 2002), págs. 1-17.



Heng-Siong Lim, Teong-Chee Chuah y Hean-Teik Chuah. "On the optimal alpha-k curve of the sample myriad". En: *IEEE Signal Processing Letters* 14.8 (ago. de 2007), págs. 545-548.



Sudhakar Kalluri y Gonzalo R Arce. "Fast algorithms for weighted myriad computation by fixed-point search". En: *IEEE Transactions Signal on Processing* 48.1 (ene. de 2000), págs. 159-171.



Z. Miao y X. Jiang. "Weighted Iterative Truncated Mean Filter". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 61.16 (ago. de 2013), págs. 4149-4160.



X. Jiang. "Iterative Truncated Arithmetic Mean Filter and Its Properties". En: *IEEE Transactions on Image Processing* 21.4 (abr. de 2012), págs. 1537-1547.

# Referencias V



Zhenwei Miao y Xudong Jiang. "Additive and exclusive noise suppression by iterative trimmed and truncated mean algorithm". En: *Signal Processing* 99 (jun. de 2014), págs. 147-158.



T. C. Aysal y K. E. Barner. "Meridian Filtering for Robust Signal Processing". En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 55.8 (ago. de 2007), págs. 3949-3962.



Rafael E. Carrillo, Tuncer C. Aysal y Kenneth E. Barner. "A Generalized Cauchy Distribution Framework for Problems Requiring Robust Behavior". En: *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* 2010 (ago. de 2010), Article ID 312989, 19 p.



Chrysostomos L Nikias y Min Shao. *Signal processing with alpha-stable distributions and applications*. Wiley-Interscience, 1995.



Apostolos T Georgiadis y Bernard Mulgrew. "Adaptive Bayesian decision feedback equaliser for alpha-stable noise environments". En: *Signal Processing* 81.8 (2001), págs. 1603-1623.